Министерство науки и образования РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего образования

«Казанский государственный энергетический университет»

Кафедра «ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ И МОДЕЛИ»

Отчет по лабораторной работе №8

Решение линейных уравнений в частных производных первого порядка

«Теория систем и системный анализ»

**Исполнитель**: Соловьёв Леонид

**Группа**: ПИ-1-22

# Вариант: № 17

**Проверил:** доц. Абдулмянов Т.Р.

# Казань 2024

**Основные понятия теории вероятностей и математической статистики**

**Теория**

Случайные события и величины, их основные характеристики

Для случайных величин (далее – СВ) приходится использовать особые, статистические методы их описания. В зависимости от типа самой СВ – дискретная или непрерывная это делается по-разному.

Дискретное описание заключается в том, что указываются все возможные значения данной величины (например – 7 цветов обычного спектра) и для каждой из них указывается вероятность или частота наблюдений именного этого значения при бесконечно большом числе всех наблюдений.

Можно доказать (и это давно сделано), что при увеличении числа наблюдений в определенных условиях за значениями некоторой дискретной величины частота повторений данного значения будет все больше приближаться к некоторому фиксированному значению – которое и есть вероятность этого значения.

К понятию вероятности значения дискретной СВ можно подойти и иным путем – через случайные события. Это наиболее простое понятие в теории вероятностей и математической статистике – событие с вероятностью 0.5 или 50% в 50 случаях из 100 может произойти или не произойти, если же его вероятность более 0.5 – оно чаще происходит, чем не происходит. События с вероятностью 1 называют достоверными, а с вероятностью 0 – невозможными.

Отсюда простое правило: для случайного события X вероятности P(X) (событие происходит) и P(X) (событие не происходит), в сумме для простого события дают 1.

математическим ожиданием случайной величины, которое в общем случае определяется как



Для этой цели используется специальная величина – мера рассеяния – так же как мы "усредняли" допустимые значения СВ, можно усреднить ее отклонения от среднего. Но так как разности (Xi – Mx) всегда будут компенсировать друг друга, то приходится усреднять не отклонения от среднего, а квадраты этих отклонений. Величину



принято называть дисперсией случайной величины X.

Вычисление дисперсии намного упрощается, если воспользоваться выражением



т.е. вычислять дисперсию случайной величины через усредненную разность квадратов ее значений и квадрат ее среднего значения.

Среднеквадратичное отклонение или отклонение от среднего значения:



о значения Mx и SX являются размерными и их абсолютные значения мало что говорят. Поэтому часто для грубой оценки «случайности», данной СВ используют т.н. коэффициент вариации или отношение корня квадратного из дисперсии к величине математического ожидания:



Итак, запомним, что неслучайная, детерминированная величина имеет математическое ожидание равное ей самой, нулевую дисперсию и нулевой коэффициент вариации, в то время как равномерно распределенная СВ имеет максимальную дисперсию и максимальный коэффициент вариации.

В ряде ситуаций приходится иметь дело с непрерывно распределенными СВ – весами, расстояниями и т.п. Для них идея оценки среднего значения (математического ожидания) и меры рассеяния (дисперсии) остается той же, что и для дискретных СВ. Приходится только вместо соответствующих сумм вычислять интегралы. Второе отличие – для непрерывной СВ вопрос о том какова вероятность принятия нею конкретного значения обычно не имеет смысла – как проверить, что вес товара составляет точно 242 кг – не больше и не меньше?

Для всех СВ – дискретных и непрерывно распределенных, имеет очень большой смысл вопрос о диапазоне значений. В самом деле, иногда знание вероятности того события, что случайная величина не превзойдет заданный рубеж, является единственным способом использовать имеющуюся информацию для системного анализа и системного подхода к управлению. Правило определения вероятности попадания в диапазон очень просто – надо просуммировать вероятности отдельных дискретных значений диапазона или проинтегрировать кривую распределения на этом диапазоне.

**Взаимосвязи вероятностей случайных событий**

Вероятность события X будем обозначать P(X) и иметь ввиду, что вероятность того, что событие не произойдет, составляет



вероятность наступления двух независимых событий определяется произведением их вероятностей:



Перейдем теперь к событиям, зависимым. Будем называть вероятность события X при условии, что событие Y уже произошло условной вероятностью P(X/Y), считая при этом P(X) безусловной или полной вероятностью. Столь же простые рассуждения приводят к так называемой формуле Байеса



Дополним эту формулу общим выражением безусловной вероятности события X:



1. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.  
   **Решение:** 5/50 = 0.1
2. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков. **Решение:** (1 двойка + 1 четверка + 1 шестерка) / 6 = 0.5
3. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.   
   **Решение:** 10 чисел в промежутке(50-59), 9 чисел с 5 на конце(5, 15 и т.д.). Следовательно, (100 – 19) / 100 = 0.81
4. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных ев одну линию» кубиков можно будет прочесть слово «спорт».  
   **Решение:** 1/5 \* 1/4 \* 1/3 \* 1/2 \* 1/1 = 1/120
5. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех, вынутых по одной и расположенных «в одну линию» карточках можно будет прочесть слово «трос».  
   **Решение:** 1/6 \* 1/5 \* 1/4 \* 1/3 = 1/360
6. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, зная закон ее распределения:   
   X 6 3 1   
   р 0,2 0,3 0,5

**Решение:** M(X) = 6 \* 0.2 + 3 \* 0.3 + 1 \* 0.5 = 1.2 + 0.9 + 0.5 = 2.6

1. Производится 4 выстрела с вероятностью попадания в цель p1 = 0,6, p2 = 0,4, p3 = 0,5 и р4 = 0,7. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.   
   **Решение:** M(X) = 1 \* 0.6 + 1 \* 0.4 + 1 \* 0.5 + 1 \* 0.7 = 2.2
2. Дискретные независимые случайные величины заданы законами распределения:   
   X 1 2 Y 0,5 1   
   р 0,2 0,8 р 0,3 0,7  
   Найти математическое ожидание произведения XY  
   **Решение:** M(XY) = M(X) \* M(Y) = (1\*0.2 + 2\*0.8) \* (0.5\*0.3+1\*0.7) = 1.8 \* 0.85 = 1.53
3. В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны m деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно k стандартных.  
   m из N: C(N, m) = N! / (m! / (N-m)!)

k из n: C(n, k) = n! / (k! \* (n-k)!)

m-k из N-n: C(N-n, m-k) = (N-n)! / ((m-k)! – (N-n-m+k)!)

**Решение:** C(n, k) \* C(N-n, m-k) / C(N, m)

1. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: x1 = 4 с вероятностью p1 = 0,5; х2 = 6 с вероятностью р2 = 0,3 и x3 с вероятностью p3. Найти x3 и p3 зная, что М(X) = 8.  
   Решение: 4 \* 0.5 + 6 \* 0.3 + x3 \* p3 = 8 => 4.2 = x3 \* p3 = x3 \* (1 – 0.5 – 0.3) => 4.2 \* 5 = x3 => x3 = 21, p3 = 0.2
2. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: x1 = –1, х2 = 0, x3 = 1, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: М(X) = 0,1, М(X 2 ) = 0,9. Найти вероятности p1, p2, p3, соответствующие возможным значениям x1, x2, x3.

**Решение:**   
-1 \* p1 + 0 \* p2 + 1 \* p3 = 0.1

1 \* p1 + 0 \* p2 + 1 \* p3 = 0.9  
p1 = 0.4  
p3 = 0.5

p2 = 0.1

1. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: x1 = 1, x2 = 2, x3 = 3, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: М(X) = 2,3, М(Х 2 ) = 5,9. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X.  
   1 \* p1 + 2 \* p2 + 3 \* p3 = 2.3  
   1 \* p1 + 4 \* p2 + 9 \* p3 = 5.9  
     
   2\*p2 + 6\*p3 = 3.6  
   p2 + 3\*p3 = 1.8  
   1\*p1 + 3\*p2 + 6\*p3 = 4.1  
   1\*p1 + 1\*p2 = 0.5

p3 = 1 – 0.5 = 0.5  
p2 + 3 \* 0.5 = 1.8 => p2 = 0.3  
p1 = 0.2  
**Решение:** p1 = 0.2; p2 = 0.3; p3 = 0.5

1. В партии из 10 деталей содержится три нестандартных. Наудачу отобраны две детали. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X — числа нестандартных деталей среди двух отобранных.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | 0 | 1 | 2 |
| p | (7/10)\*(6/9) = 14/30 | (3/10)\*(7/9)=7/30 | (3/10)\*(2/9)=2/30 |

**Решение:** M(X) = 0 \* 14/30 + 1 \* 7/30 + 2 \* 2/30 = 11/30

1. Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию случайной величины Z = ЗХ + 2Y, если известно, что D(X) = 5, D(Y) = 6.

**Решение:** Z = 3X + 2Y = 9 \* 5 + 4 \* 6 = 69

1. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:   
   X –5 2 3 4   
   р 0,4 0,3 0,1 0,2  
   E(X) = -5\*0.4 + 2\*0.3 + 3\*0.1 + 4\*0.2 = -0.3  
   Дисперсия: Var(X) = ((-5 + 0.3)2 \* 0.4) + ((2 + 0.3)2 \* 0.3) + ((3 + 0.3)2 \* 0.1) + ((4 + 0.3)2 \* 0.2) = 8.836 + 1.587 + 1.089 + 3.698 = 15.21

Ср. кв. отклон =

1. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:   
   а) X 4,3 5,1 10,6

р 0,2 0,3 0,5  
E(X) = 4.3\*0.2 + 5.1\*0.3 + 10.6\*0.5 = 0.86 + 1.53 + 5.3 = 7.69  
Дисперсия: Var(X) = ((4.3 - 7.69)2 \* 0.2) + ((5.1 – 7.69)2 \* 0.3) + ((10.6 – 7.69)2 \* 0.5) = 2.29842 + 2.01243 + 4.23405 = 8.5449

Ср. кв. отклон =   
б) X 131 140 160 180  
 р 0,05 0,10 0,25 0,6

E(X) = 131\*0.05 + 140\*0.1 + 160\*0.25 + 180\*0.6 = 6.55 + 14 + 40 + 108 = 168.55  
Дисперсия: Var(X) = ((131 – 168.55)2 \* 0.05) + ((140 – 168.55)2 \* 0.1) + ((160 – 168.55)2 \* 0.25) + ((180 - 168.55)2 \* 0.6) = 70.500125 + 81.51025 + 18.275625 + 78.6615 = 248.9475

Ср. кв. отклон =